التمرين 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$.

2) أ ـ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f.

ب ـ أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1,+\infty[$.

ج ـ أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أ ـ بين أن $A\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ نقطة انعطاف المنحنى (C).

ب ـ أعط معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C) في النقطة A.

4) أ ـ أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب ـ أنشئ المنحنى (C).

الحل

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

5) أ- لنحسب $F'(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2}{x+1}\left[\frac{x}{2} + \left(\frac{x+1}{2}\right)\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = -\infty$$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{2}{x+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \left(\dfrac{x+1}{2}\right)\ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 0$)

2) أ- الدالة $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ دالة جذرية إذن فهي قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$.

الدالة $x \mapsto \dfrac{x+1}{2}$ دالة حدودية إذن فهي قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ و $\dfrac{x+1}{2} > 0$ لكل x من $]-1, +\infty[$ والدالة $x \mapsto \ln x$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ إذن الدالة $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ (كمركب دالتين قابلتا للاشتقاق).

الخلاصة :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$.

ب - حساب $f'(x)$:

$$\forall x \in]-1,+\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{-x}{(x+1)^2}$$

ج - جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ - لنحسب $f''(x)$:

$$\forall x \in]-1,+\infty[\quad f''(x) = -\frac{(x+1)^2 - x.2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)^3}$$

إشارة $f''(x)$:

x	-1		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

بما أن $f''(x)$ تنعدم في 1 مع تغيير الإشارة فإن $A\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ نقطة انعطاف المنحنى (C).

ب ـ لدينا $f(1)=\dfrac{1}{2}$ و $f'(1)=\dfrac{-1}{4}$

إذن معادلةالمماس في A هي $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$.

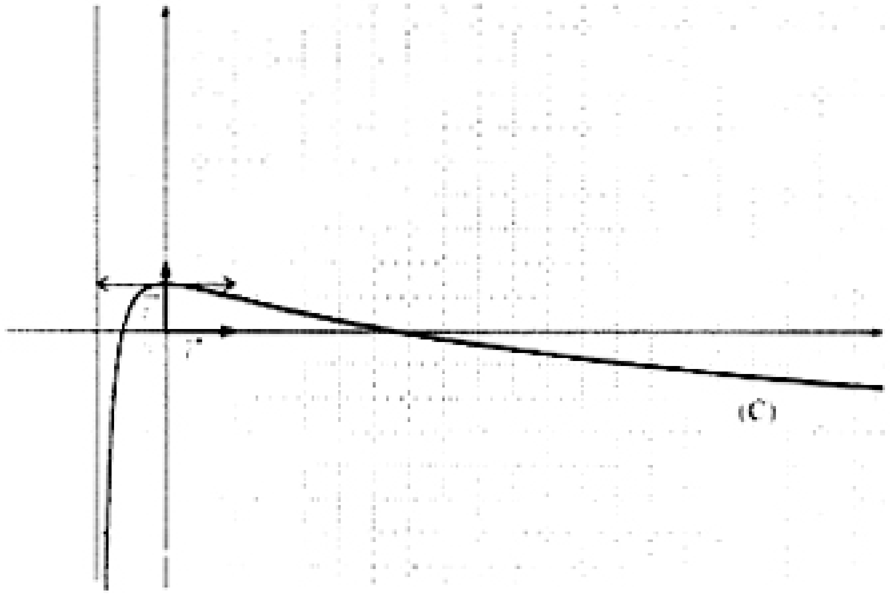
4) أ ـ لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x}+\frac{\ln 2}{x}\right)$$

$$=0-0\times 1+0=0$$

إذن محور الأفاصيل اتجاه مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب -



التمرين 2

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 2\ln x - x$

1) أعط جدول تغيرات g.

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$.

II- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 - \dfrac{\ln x}{x} + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$

وليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$

ب- استنتج الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

2) أ- بين أن $f'(x) = \dfrac{(1 - \ln x)(2\ln x - x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أ- أعط معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي أفصولها $x_0 = 1$.

ب- أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة).

الحل

-I $g(x) = 2\ln x - x$

(1 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$

$\forall x \in]0, +\infty[\quad g'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{2-x}{x}$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$2\ln 2 - 2$	$\searrow$	$-\infty$

(2 من خلال جدول تغيرات الدالة g أعلاه، الدالة g تقبل قيمة قصوية مطلقة عند النقطة 2

إذن $\quad g(x) \le g(2) \quad \forall x \in]0, +\infty[$

وبما أن $g(2) < 0$ فإن $g(x) < 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

-II

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

1) أ ـ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \ln x = -\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left[1 + \frac{\ln x}{x}\left(-1 + \frac{\ln x}{x}\right)\right] = +\infty$$

ب ـ بما أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ فإن المستقيم ذي المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C).

بما أن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ فإن محور الأفاصيل مقارب للمنحنى (C).

2) أ ـ حساب $f'(x)$:

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = -\frac{1 - \ln x}{x^2} + 2\,\frac{1 - \ln x}{x^2} \times \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}\left(-1 + 2\,\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= \frac{(1 - \ln x)(2 \ln x - x)}{x^3}$$

ب ـ جدول تغيرات الدالة f :

بما أن $2 \ln x - x < 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة

$\ln x - 1$ أي $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e$ ،

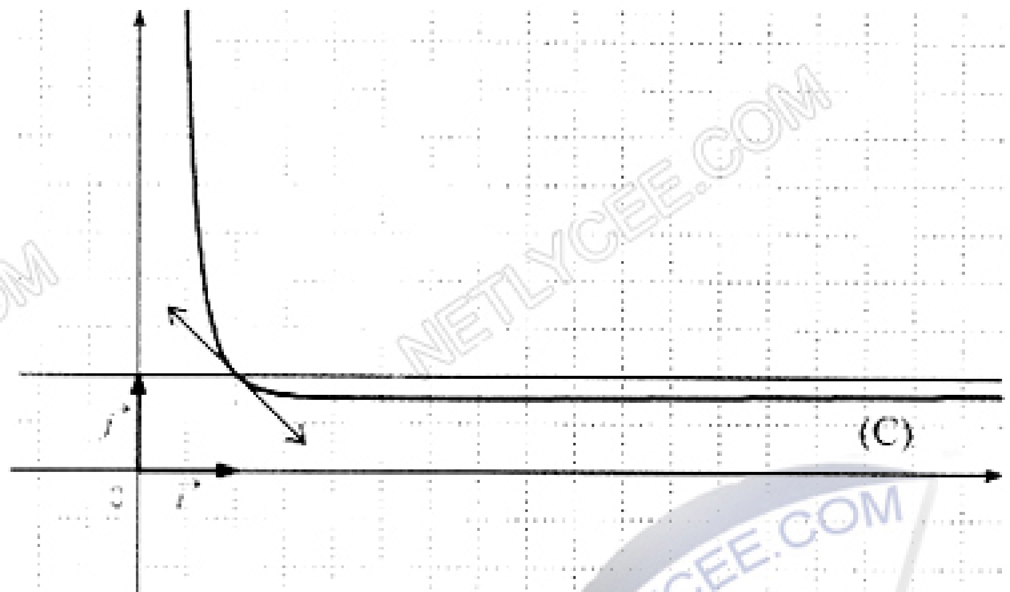
إذن جدول تغيرات f هو كالتالي :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^2 - e + 1}{e^2}$	$\nearrow$	1

5) أ ـ لدينا $f(1) = 1$ و $f'(1) = -1$

إذن معادلة ديكارتية للمماس (T) هي $y = -x + 2$.

ب ـ إنشاء المنحنى (C) :



التمرين 3

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $IR - \{-1\}$ بما يلي : $g(x) = -2 + \dfrac{x}{x-1} + \ln|x-1|$

1) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x)$

2) أ ـ بين أن $g'(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$ لكل x من $IR - \{1\}$.

ب ـ أعط جدول تغيرات الدالة g (ليس مطلوب حساب باقي النهايات).

3) أ ـ بين أن الدالة g تنعدم في 2 وفي α حيث $-2.60 < \alpha < -1.59$.

ب ـ استنتج إشارة $g(x)$.

II- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $IR - \{-1\}$ بما يلي : $f(x) = -2x + x\ln|x-1|$

وليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب ـ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

2) أ ـ بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل x من $IR - \{1\}$

ب ـ أعط جدول تغيرات الدالة f

3) أ ـ بين أن $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}$ وأن $1.86 < f(\alpha) < 1.88$

ب ـ أنشئ المنحنى (C).

الحل

-I

$$g(x) = -2 + \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

(1

$$\left(\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \quad \lim_{x \to -\infty} \ln|x-1| = +\infty \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\left(\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x}{x-1} = -\infty \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ln|x-1| = -\infty \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = -\infty$$

(2 أ ـ حساب $g'(x)$:

$$\forall x \in IR - \{1\} \quad g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{(x-1)'}{x-1}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

ب ـ جدول تغيرات g :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

3) أ ـ من خلال جدول تغيرات الدالة g.

- نلاحظ أن $g(2)=0$ وأن : $g(x)>0$ $\forall x \in]1, 2[\cup]2, +\infty[$
- الدالة h، قصور الدالة g على المجال $]-\infty, 1[$ ، دالة متصلة

وتناقصية قطعا على $]-\infty, 1[$ و $h(-2,60) \times h(2,59) < 0$

(لأن $g(-2,60) \approx 0,003$ و $g(-2,59) \approx -0,0004$)

إذن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty, 1[$

وأن $-2,60 < \alpha < -2,59$.

الخلاصة :

الدالة g تنعدم في 2 وفي α حيث $-2,60 < \alpha < -1,59$.

ب ـ إشارة $g(x)$:

من خلال ما سبق لدينا :

- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\alpha; 2\}$
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow x\ ]-\infty, \alpha[\ \cup\ ]1, 2[\ \cup\ ]2, +\infty[$

- $g(x) < 0 \iff x \in]\alpha; 1[$

II - $f(x) = -2x + x\ln|x-1|$

1) أ ـ $\lim_{x \to 1} \ln|x-1| = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x(-2 + \ln|x-1|) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x(-2 + \ln|x-1|) = -\infty$$

ب ـ لدينا $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$ إذن المستقيم ذي المعادلة $x = 1$ مقارب للمنحنى (C)

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} (-2 + \ln|x-1|) = +\infty$$

إذن محور الأراتيب إتجاه مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

2) أ ـ حساب $f'(x)$:

$$\forall x \in IR - \{1\} \quad f'(x) = -2 + 1 \times \ln|x-1| + x \times \frac{1}{x-1}$$

$$= -2 + \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

$$= g(x)$$

ب ـ جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		α		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

3) أ ـ لدينا $g(\alpha)=0$ أي $\ln|\alpha-1| = 2 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$

$$f(\alpha) = -2\alpha + \alpha\left(2 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$$

لدينا $\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha} = -\alpha - 1 + \dfrac{1}{1-\alpha}$

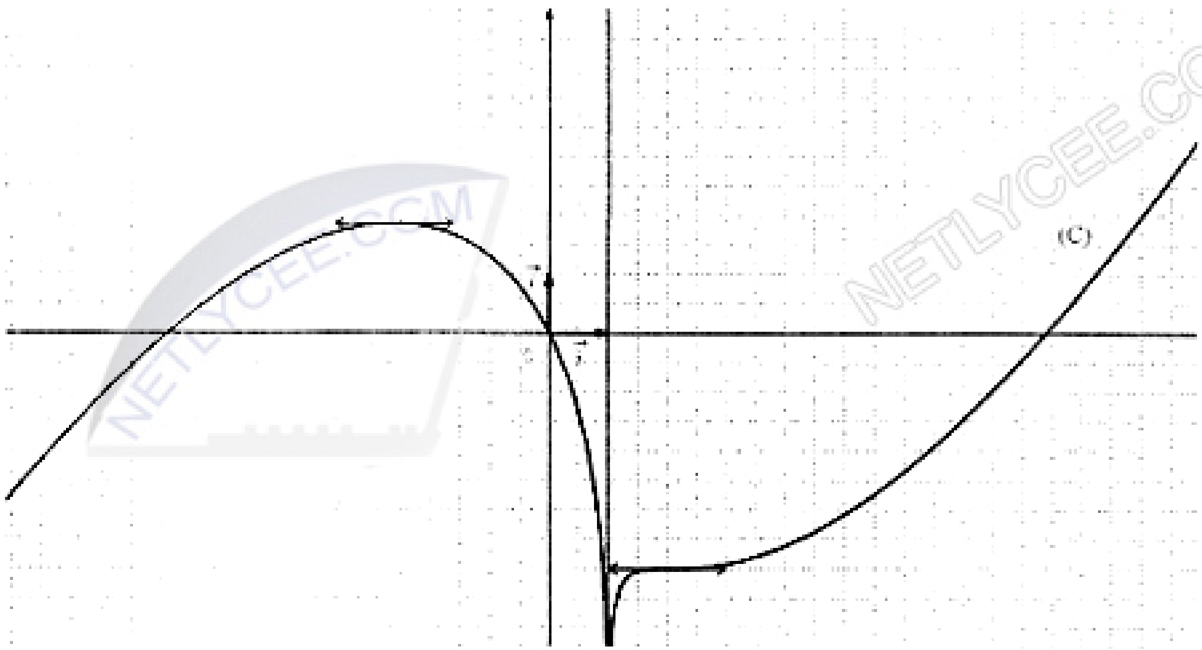
$$-2,60 < \alpha < -2,59 \Rightarrow \begin{cases} 1,59 < -\alpha - 1 < 1,60 \\ 3,59 < 1-\alpha < 3,60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1,59 < -\alpha - 1 < 1,60 \\ \dfrac{1}{3,60} < \dfrac{1}{1-\alpha} < \dfrac{1}{3,59} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1,59 + \frac{1}{3,60} < -\alpha - 1 + \frac{1}{1-\alpha} < 1,60 + \frac{1}{3,59}$$

$$\Rightarrow 1,86 < f(\alpha) < 1,88$$

ج -



التمرين 4

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \ln|2+x| - \ln|2-x|$

وليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) أ- حدد D حيز تعريف الدالة f.

ب- بين أن f دالة فردية.

2) أ- أحسب نهايات f عند محدات D.

ب- أحسب $f'(x)$ لكل x من D ثم أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف ينبغي تحديدها واعط معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C) عند هذه النقطة.

4) أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب- أنشئ المنحنى (C).

الحل

$$f(x) = \ln|2+x| - \ln|2-x|$$

1) أ ـ $D = \{ x \in IR \;/\; 2+x \neq 0$ أو $2-x \neq 0 \}$

$$=]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$$

ب ـ لكل x من D لدينا $-x \in D$

$$f(-x) = \ln|2+(-x)| - \ln|2-(-x)|$$
$$= \ln|2-x| - \ln|2+x|$$
$$= -f(x)$$

إذن f دالة فردية.

2) أ ـ حساب النهايات :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \ln|2+x| &= \ln 4 \\ \lim_{x \to 2} \ln|2-x| &= -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -2} \ln|2+x| &= -\infty \\ \lim_{x \to -2} \ln|2-x| &= \ln 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$$

• لدينا : $f(x) = \ln\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right|$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{2+x}{2-x} = -1 \Rightarrow \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \ln 1 = 0$$

ب ـ $\forall x \in D : f'(x) = \dfrac{(2+x)'}{2+x} - \dfrac{(2-x)'}{2-x}$

$$= \frac{1}{2 + x} - \frac{1}{x - 2}$$

$$= \frac{x - 2 - x - 2}{(x + 2)(x - 2)}$$

إذن :

$$\boxed{\forall x \in D ; \ f'(x) = \frac{-4}{(x + 2)(x - 2)}}$$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	1	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

(3

$$\forall x \in D ; \ f'(x) = \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x + 2)^2} + \frac{1}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{-(x - 2)^2 + (x + 2)^2}{(x + 2)^2 (x - 2)^2}$$

$$= \frac{8x}{[(x+2)(x-2)]^2}$$

لدينا إشارة $f''(x)$ هي إشارة $8x$

إذن f'' تنعدم في $x_0 = 0$ مع تغيير الإشارة

إذن $O(0,0)$ هي نقطة انعطاف المنحنى (C) :

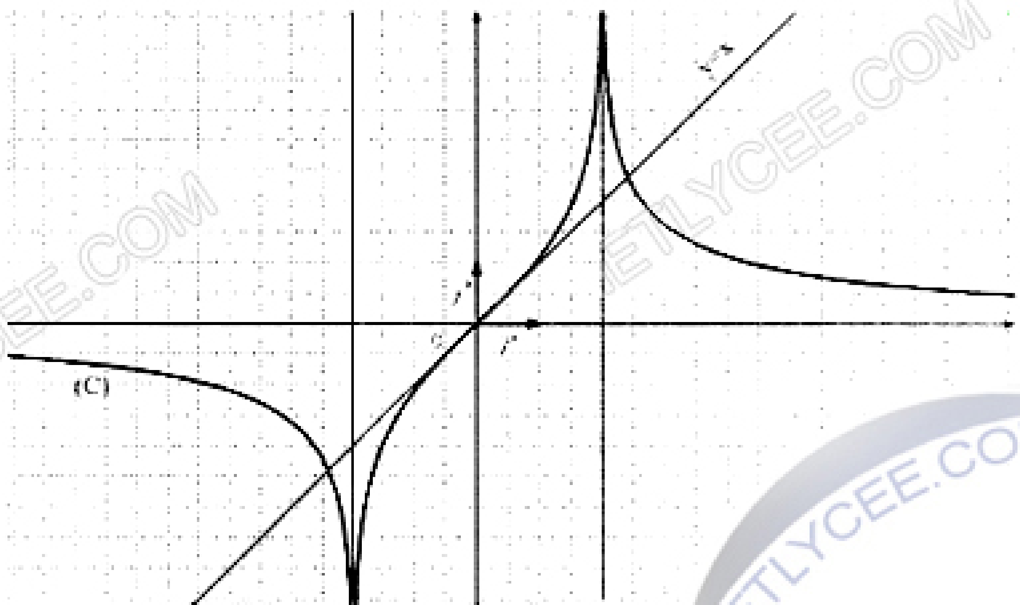
لدينا $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$

إذن $y = x$ هي معادلة ديكارتية للمماس المنحنى (C) في الصفر.

4) أ- بما أن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

فإن محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $(+\infty)$.

ب -



التمرين 5

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}\,(\ln x - 2) \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب ـ أدرس إتصال الدالة f على اليمين في الصفر.

2) أ ـ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر.

ب ـ أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) بين أن المنحنى (C) يقبل انعطاف ينبغي تحديدها.

4) أ ـ أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب ـ أنشئ المنحنى (C).

الحل

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln x - 2) \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) أ-

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\ln x - 2) = +\infty$$

ب-

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - 2\sqrt{x}) = 0 = f(0)$$

إذن f دالة متصلة على اليمين في الصفر.

2) أ-

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2) = -\infty$$

إذن f غير قابلية اشتقاق على اليمين في الصفر.

ب- حساب $f'(x)$:

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x - 2) + \sqrt{x} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\ln x - 2 + 2}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0			1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		-2	$\nearrow$	$+\infty$

3) حساب $f''(x)$:

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\,2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\ln x}{4x}$$

$$= \frac{2-\ln x}{4x\sqrt{x}}$$

إشارة $f''(x)$:

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

بما أن $f''(x)$ تنعدم في e^2 مع تغيير الإشارة فإن $I(e^2;0)$ نقطة انعطاف المنحنى (C).

4) أ-

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 0$$

إذن محور الأراتيب إتجاه مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب ـ إنشاء المنحنى (C) :